LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e Gestão
Álgebra Linear - 1º Semestre - 2020/2021

Época Normal: 21 de janeiro de 2021
Duração: 2h
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Sejam α e $\beta \in \mathbb{R}$ e considere o seguinte sistema de equações lineares $\begin{cases} -x+y+\alpha z &= 0 \\ x+8y+\beta z &= \beta \\ x+2y &= 1 \end{cases}$

   (a) Discuta, em função dos valores de α e β , o sistema.

   (b) Seja A a matriz dos coeficientes do sistema. Com base nos resultados que obteve na alínea anterior indique, caso existam, os valores de α e β para os quais:

      i. A não é invertível;

      ii. O espaço gerado pelas linhas de A é $\mathbb{R}^3$;

      iii. O espaço gerado pelas colunas de A é $\mathbb{R}^3$;

2. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$F =< (1,1,2),(1,2,0),(2,3,2) > \quad \text{e} \quad G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ c = a+b\}.$$

   (a) Determine uma base de $F \cap G$.

   (b) Determine uma base de G e indique, justificando, $dim\,(F+G)$.

3. Sendo $A \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 3$, calcule $|(-A)^{-1}(2A^2)^T|$.

4. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(ax^2+bx+c) = (a+2b, c, 3c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

   (a) Indique um conjunto gerador de $Im\,f$.

   (b) Indique, justificando, se a aplicação linear f é injectiva.

   (c) Considere a base de $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (x^2+1, x, 2)$. Escreva a matriz $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, b.c_{\mathbb{R}^3})$ e utilize a matriz obtida para calcular $f(x^2+3)$.

5. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule, em função dos valores de k, os valores próprios de A_k e respetivas multiplicidades algébricas.

   (b) Considere $k = 3$ e verifique se, para este valor de k, a matriz A_k é diagonalizável.

6. Seja $W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) : \text{soma das entradas de cada coluna de } A \text{ é } 0\}$.

   (a) Prove que W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ e indique uma base de W.

   (b) Existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que W é isomorfo a $\mathbb{R}^k$? Em caso afirmativo, indique o valor de k.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e I a matriz identidade de ordem n.

   (a) Prove que se A é diagonalizável então A é semelhante a A^T.

   (b) Supondo que $A + I = (A^T + I)A$ mostre que $|A| \in \{1, -1\}$ e que se $|A| \neq 1$ então -1 é valor próprio de A.

Cotações

1a)	1b)	2a)	2b)	3	4a)	4b)	4c)	5a)	5b)	6a)	6b)	7a)	7b)
1,5	1,5	2,0	1,5	1,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,5	2,0	1,0	1,5	1,5